

Пермский край
2025-2026 учебный год
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
11 КЛАСС

Время выполнения заданий — 235 минут (3 часа 55 минут).

Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий — 35 баллов
(по 7 баллов за каждую задачу).

- 11.1. В каждую клетку таблицы 4×4 Петя записал синим карандашом ровно по одному действительному числу. Затем Вася записал чёрной ручкой в каждую клетку сумму синих чисел, записанных в соседних с ней по сторонам клетках, после чего стёр все синие числа. Могла ли у Васи получиться таблица справа?

2	0	0	0
0	0	0	0
0	0	2	0
0	0	0	5

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим некоторые числа Петиной таблицы, как показано справа на рисунке. По условию $a_1 + a_2 = 2$, $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0$, значит $b_1 + b_2 = -2$. $b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 2$, значит $c_1 + c_2 = 4$. Но $c_1 + c_2 = 5$.

	a_2		
a_1		b_2	
	b_1		c_2
		c_1	

Полученное противоречие говорит о том, что у Васи таблица из условия получиться не могла.

Комментарий. Только ответ «нет» — 0 баллов.

- 11.2. Различные действительные числа p и q таковы, что квадратные трёхчлены $f(x) = x^2 + px + q + 3$ и $g(x) = x^2 + qx + p + 3$ имеют одно и то же наименьшее значение. Докажите, что у этих трёхчленов есть одинаковый корень.

Решение. Наименьшее значение $f(x)$ равно $f\left(-\frac{p}{2}\right) = q - \frac{p^2}{4} + 3$, а наименьшее значение $g(x)$ равно $g\left(-\frac{q}{2}\right) = p - \frac{q^2}{4} + 3$, поэтому $q - \frac{p^2}{4} + 3 = p - \frac{q^2}{4} + 3$. Значит $p - q + \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} = 0$, $(p - q)(4 + p + q) = 0$, и так как $p \neq q$, то $p + q = -4$. Осталось заметить, что тогда $f(1) = 1 + p + q + 3 = 4 - 4 = 0$ и $g(1) = 1 + q + p + 3 = 4 - 4 = 0$, то есть 1 есть их общий корень.

Комментарий. Выписано соотношение $q - \frac{p^2}{4} + 3 = p - \frac{q^2}{4} + 3 - 1$ балл.

Доказано, что $p + q = -4 - 4$ балла.

Баллы по этим критериям не суммируются.

- 11.3. Однажды Винни-Пух пополнил запасы мёда. Каждый следующий день, пока мёд ещё был, Пух съедал либо 1 килограмм мёда, либо половину текущего количества мёда. После первых 20 дней поедания мёда оставалась $\frac{1}{3}$ начального количества мёда. Ещё через несколько дней оставалась $\frac{1}{11}$ начального количества мёда. А ещё через несколько дней весь мёд был съеден. Укажите все возможные значения начального количества мёда.

Ответ. 66 и 99 килограммов.

Решение. Если в один из дней у Винни-Пуха было y кг мёда, то в предыдущий день было либо $y + 1$ кг, либо $2y$ кг мёда. Значит, если в один из дней у него было целое число килограммов мёда, то и во все предыдущие дни у него целое число килограммов мёда. В последний день Винни-Пух не мог съесть половину мёда, значит съел 1 килограмм, который был оставшимися запасами. Поэтому каждый день в запасах было целое число килограммов мёда, и исходные запасы были целыми. И так как $\frac{1}{11}$ запасов целое число, то изначально Пух имел $11h$ мёда, $h \in \mathbb{N}$.

Пусть x — изначально количество мёда. Если Пух не уполовинивал количество мёда в первые 20 дней, то $x - 20 = \frac{x}{3}$, $x = 30$, что невозможно, так как $\frac{1}{11}$ этого количества не целое число. Два или более раза уполовинивать количество мёда он не мог, так как после первого уполовинивания оставалось бы не более $\frac{x}{2}$, а после второго — не более $\frac{x}{2 \cdot 2} = \frac{x}{4} < \frac{x}{3}$ мёда. Если он съедал по килограмму первые k дней, и m дней после уполовинивания, то $\frac{x-k}{2} - m = \frac{x}{3}$, $x = 3k + 6m = 57 + 3m$ (т.к. $k + m = 19$).

$57 + 3m : 11$, $3(19 + m) : 11$, значит $19 + m : 11$. Так как $0 \leq m \leq 19$, то $19 \leq 19 + m \leq 38$, и в этом промежутке только 22 и 33 делятся на 11. Если $19 + m = 22$, $m = 3$, и $x = 57 + 3 \cdot 3 = 66$, если $19 + m = 33$, $m = 14$, $x = 57 + 3 \cdot 14 = 99$. Понятно, что

такие количества мёда подходят (порядок действий первые 20 дней определяется числами k и m , дальше можно есть по 1 килограмму).

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

Доказано, что в любой день количество мёда будет целым количеством килограммов — 1 балл.

Доказано, что (в обозначениях решения задачи) $x = 3k + 6m$ или $x = 57 + 3m - 2$ балла.

- 11.4. Мише подарили 25 камней попарно различных весов. У Миши есть прибор, который по 5 положенным в него камням находит среди них самый тяжёлый (первый по весу), следующий (второй) по весу, и третий по весу камни. Как при помощи 7 применений прибора среди всех 25 камней найти первый, второй и третий по весу камни?

Решение. Разобьём все камни на 5 групп по 5, и применим прибор к каждой группе. Шестым применением сравним веса самых тяжёлых камней в группах. Пусть $a_i > b_i > c_i$ веса соответственно самого тяжёлого, второго по величине и третьего в i -й группе, и $a_1 > a_2 > a_3$ первый, второй и третий по весу камни после шестого применения.

Понятно, что a_1 — самый тяжёлый камень из 25. Посмотрим на группу камней a_2, a_3, b_1, c_1, b_2 и докажем, что любой из оставшихся (кроме a_1) точно легче одного из них. Действительно, в первой группе все оставшееся легче c_1 , во второй — все оставшиеся легче b_2 , в третьей — все оставшиеся легче a_3 , в остальных — все оставшиеся легче самого тяжёлого в группе, значит легче a_3 .

Это значит что второй и третий по весу камни будут среди a_2, a_3, b_1, c_1, b_2 , и седьмым применением можно найти первый и второй среди этих 5 камней.

Комментарий. Правильно указаны применения прибора — не менее 4 баллов.

11.5. Диагонали AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N . Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — основания перпендикуляров, проведённых из точки N к прямым AB, BC, CD и DA соответственно. Известно, что A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на самих сторонах четырёхугольника $ABCD$ (а не на их продолжениях) и не совпадают с вершинами $ABCD$. Докажите, что в четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ можно вписать окружность.

Первое решение. Так как $\angle AA_1N + \angle AD_1N = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то четырёхугольник AA_1ND_1 вписанный. Так же доказывается, что BB_1NA_1, CC_1NB_1 и DD_1NC_1 вписанные.

В силу вписанности AA_1ND_1, DD_1NC_1 и $ABCD$ — $\angle ND_1A_1 = \angle NAA_1 =$ (опираются на дугу NA_1) $= \angle CAB = \angle CDB =$ (опираются на дугу BC) $= \angle NDC_1 = \angle ND_1C_1$ (опираются на дугу NC_1), значит N равноудалена от сторон A_1D_1 и D_1C_1 . Аналогично доказывается что N равноудалена от каждой пары соседних сторон, а значит и от всех сторон, то есть является центром вписанной в $A_1B_1C_1D_1$ окружности.

Второе решение. Из первого решения — BB_1NA_1 вписанный, значит по теореме синусов $A_1B_1 = BN \sin(\angle ABC)$. Аналогично, $C_1D_1 = ND \sin(\angle CDA)$, $B_1C_1 = NC \sin(\angle BCD)$, $A_1D_1 = AN \sin(\angle BAD)$.

Значит $A_1B_1 + C_1D_1 = BN \sin(\angle ABC) + ND \sin(\angle CDA) = BN \sin(\angle ABC) + ND \sin(\angle ABC) = BD \sin(\angle ABC)$ и $B_1C_1 + D_1A_1 = NC \sin(\angle BCD) + AN \sin(\angle BAD) = NC \sin(\angle BAD) + AN \sin(\angle BAD) = AC \sin(\angle BAD)$.

Осталось заметить, что из теоремы синусов $\frac{BD}{\sin(\angle BAD)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)}$, значит $BD \sin(\angle ABC) = AC \sin(\angle BAD)$, отсюда — $A_1B_1 + C_1D_1 = B_1C_1 + D_1A_1$, и значит четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ описанный.

Комментарий. Доказано, что один из четырёхугольников $AA_1ND_1, BB_1NA_1, CC_1NB_1$ или DD_1NC_1 вписанный — 1 балл.